# Trajectoire du soleil dans le ciel et panneaux solaires

Cyril Pitrou,*

(Dated: March 16, 2020)

En supposant que l'orbite de la Terre autour du soleil est circulaire (ce qui fait une erreur de l'ordre de 1%), on peut obtenir des expressions assez simples pour le mouvement du soleil dans le ciel en un point de la Terre. On utilise ces formules pour étudier les limites sur l'efficacité des panneaux solaires, ainsi que pour quantifier la variabilité de ce type de production d'énergie. Dans ces notes on dérive toutes les formules pour les angles permettant de repérer la position du soleil, déterminer les éphémérides, et les efficacités géométriques des panneaux solaires dans différentes configurations. Les graphiques associés sont réunis sur le site web *Le Dernier Carbone* dans le billet associé [1].

## Introduction

On suppose que l'orbite terrestre autour du soleil est un cercle parfait. On néglige donc la petite ellipticité de la trajectoire ce qui fait que tous les résultats seront entachés d'erreurs de l'ordre du pourcent. Par ailleurs, pour chaque journée, on suppose que la Terre ne bouge pas autour du soleil. Comme il y a 365.25 jours par ans, on néglige donc le léger déplacement au cours de chaque journée. Tout se passe comme si à minuit, la Terre faisait un déplacement, puis ne bouge pas pendant toute la journée. Cela permet de séparer le mouvement de la Terre autour du soleil, et le mouvement de rotation de la Terre autour d'elle même. Ceci introduit des erreurs inférieures au pourcent et est donc une modélisation très acceptable étant donné qu'on a déjà ignoré l'ellipticité de l'orbite.

On néglige également l'étendue angulaire du soleil pour les éphémérides et on assimile donc le soleil à un point. La taille angulaire du soleil étant d'un demi degré, cela va également introduire des erreurs largement inférieures au pourcent et donc totalement acceptables dans notre modélisation. De même le léger aplatissement de la terre au niveau des pôles est négligé, et on décrit la Terre par une sphère parfaite, si bien que l'angle de la latitude permet également de donner la direction du zenith.

Sauf contre-indication, les durées sont exprimées en jours (un jour fait 24 heures) et une fraction de jour peut facilement être convertie en heures.

*cyril.pitrou@ens-lyon.org

## 1. ANGLES

### 1.1. Latitude et longitude

On considère un point de la Terre de latitude $\lambda$ et situé sur le méridien de référence choisi comme celui dans la direction du soleil au solstice d'été (voir figure 1). L'angle $\varphi_{\mathrm{T}}$ est l'angle de rotation de la Terre autour de son axe depuis le solstice d'été.

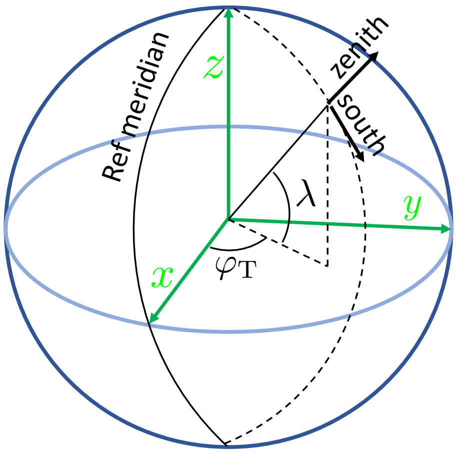


FIG. 1: Définition de la latitude et de $\varphi_{\mathrm{T}}$.

Les coordonnées Cartésiennes (dans un référentiel en translation uniforme avec le centre de la Terre) de ce point de la Terre en fonction du temps sont reliées par

$$(x_{\mathrm{T}}, y_{\mathrm{T}}, z_{\mathrm{T}}) = (\cos\lambda\cos\varphi_{\mathrm{T}}, \cos\lambda\sin\varphi_{\mathrm{T}}, \sin\lambda). \quad (1)$$

### 1.2. Déclinaison

Le plan dans lequel évolue le soleil (l'écliptique) est incliné de $\tilde{\delta} = 23.45°$ par rapport au plan de l'équateur (voir figure 2).

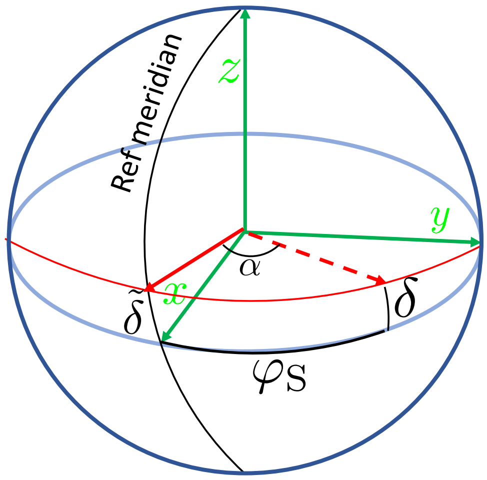


FIG. 2: Trajectoire du soleil (en rouge), avec la déclinaison $\delta$ et la rotation $\alpha$ liée au mouvement de la Terre autour du soleil.

L'angle de rotation du soleil autour de la terre est (si orbite circulaire)

$$\alpha = \frac{\bar{D}}{365.25} \times 2\pi\,, \quad (2)$$

où $\bar{D}$ est le nombre de jours (un entier). On prend comme référence $\bar{D} = 0$ le solstice d'été, en supposant que celui-ci a lieu à midi. A ce moment de référence, l'axe de la Terre est incliné exactement en direction du soleil.

Les coordonnées Cartésiennes de la direction du soleil sont

$$(x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}}, z_{\mathrm{S}}) = (\cos\alpha\cos\tilde{\delta}, \sin\alpha, \cos\alpha\sin\tilde{\delta})\,. \quad (3)$$

La déclinaison est définie pour chaque jour comme l'angle entre le plan de l'équateur et la direction du soleil. Le sinus de la déclinaison est donnée par la composante $z_{\mathrm{S}}$, donc

$$\sin\delta = \cos\alpha\sin\tilde{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \arcsin(\cos\alpha\sin\tilde{\delta}). \quad (4)$$

Bien sûr la déclinaison est maximale aux solstice, et elle est nulle aux équinoxes car on a alors $\cos\alpha = 0$ (l'axe du soleil est alors parfaitement orthogonal à l'axe de rotation de la Terre), comme on le voit sur la figure (3).

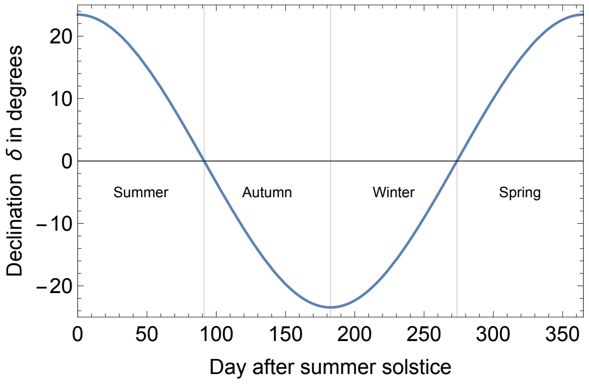


FIG. 3: Déclinaison en fonction du jour après le solstice d'été. Les saisons indiquées sont celles dans l'hémisphère nord.

Avec cette déclinaison, on peut récrire la direction du soleil en coordonnées sphériques

$$(x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}}, z_{\mathrm{S}}) = (\cos\delta\cos\varphi_{\mathrm{S}}, \cos\delta\sin\varphi_{\mathrm{S}}, \sin\delta). \quad (5)$$

On obtient l'angle $\varphi_{\mathrm{S}}$ par

$$\tan\varphi_{\mathrm{S}} = \frac{\tan\alpha}{\cos\tilde{\delta}}\,. \quad (6)$$

Pour être exact cette formule ne va donner le bon résultat que pour un angle compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Si $\alpha$ est plus grand que $\pi/2$ il suffit d'utiliser la $\pi$-périodicité de la fonction tangente.

### 1.3. Midi solaire

Pour chaque journée, le midi solaire est défini par le moment où le soleil est au plus haut et parfaitement dans la direction du sud. Chaque jour, la Terre tourne autour de son axe d'un peu plus qu'un tour puisqu'elle fait 366.25 tours sur elle même en un an. Pour faire un tour sur elle-même, elle ne met pas 24 heures (un jour) mais $t_{\rm tour} = 24 \times (365.25/366.25)$ heures, donc $t_{\rm tour} = (365.25/366.25)$ jour. En effet d'un jour à l'autre elle a légèrement tourné autour du soleil et elle doit faire un tout petit peu plus qu'un tour pour se recaler en face du soleil. Comme on souhaite avoir des journées qui font toutes la même durée, on a donc rajouté $(\Delta t) = (1/366.25)$ au temps pour faire un tour afin de définir la durée du jour

$$\begin{aligned} t_{\rm jour} &= t_{\rm tour} + (\Delta t) \\ &= \left(\frac{365.25}{366.25} + \frac{1}{366.25}\right) \text{jour} = 1\,\text{jour}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Si la Terre n'était pas inclinée, cela suffirait à remettre correctement le soleil au sud à midi. Cependant comme la Terre est inclinée, le $\Delta t$ qu'il faut rajouter n'est pas le même au cours de l'année. Il y a des variations autour de cette moyenne. L'angle polaire va comme

$$\begin{aligned} \varphi_{\rm T} &= D \times \frac{366.25}{365.25} \times 2\pi \\ &= 2\pi(D - \bar{D}) \times \frac{366.25}{365.25} + \alpha\,, \end{aligned} \tag{8}$$

où $D$ est le nombre de jours (possiblement non entier pour prendre en compte l'heure dans chaque journée).

Au vrai midi solaire on doit avoir $\varphi_{\rm T} = \varphi_{\rm S}$, ce qui signifie que le soleil est plein sud (dans l'hémisphère nord). On doit donc avoir

$$\tan\varphi_{\rm T} = \tan\varphi_{\rm S} = \frac{\tan\alpha}{\cos\tilde{\delta}}\,, \tag{9}$$

si bien qu'on en déduit le temps supplémentaire (en fraction de jour) nécessaire pour être au midi solaire

$$D - \bar{D} = \left(\frac{365.25}{366.25}\right)\frac{1}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{\tan\alpha}{\cos\tilde{\delta}}\right) - \alpha\right]. \tag{10}$$

Comme il s'agit déjà d'une petite quantité, on négligera sans problème le facteur 365.25/366.25 de cette expression. On retient donc que le midi solaire est décalé de

$$\Delta_{\rm midi} = D - \bar{D} \simeq \frac{1}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{\tan\alpha}{\cos\tilde{\delta}}\right) - \alpha\right]. \tag{11}$$

Cette expression n'est valable que pour $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ mais elle est périodique de période $\pi$. Donc si $\alpha > \pi/2$ on utilise la $\pi$-périodicité. Par ailleurs, les cas $\alpha = \pm\pi/2$ sont un peu spéciaux puisqu'on a alors $\tan\alpha = \pm\infty$, mais on utilise alors que $\arctan \pm\infty = \pm\pi/2$ et donc dans ces deux cas, correspondant aux équinoxes, $\Delta_{\rm midi} = 0$. On voit que ces variations du midi solaire par rapport au midi horloge peuvent aller jusqu'à dix minutes (figure 4). Quand les jours diminuent après le solstice d'été, le midi solaire augmente si bien que la réduction de la durée des jours se fait au début quasiment uniquement par le fait que le lever du soleil est de plus en plus tard, et le coucher du soleil ne varie quasiment pas les premiers jours après le solstice. De même après le solstice d'hiver quand les jours rallongent, le midi solaire augmente et donc c'est l'heure de coucher du soleil qui varie beaucoup plus vite que l'heure du lever.

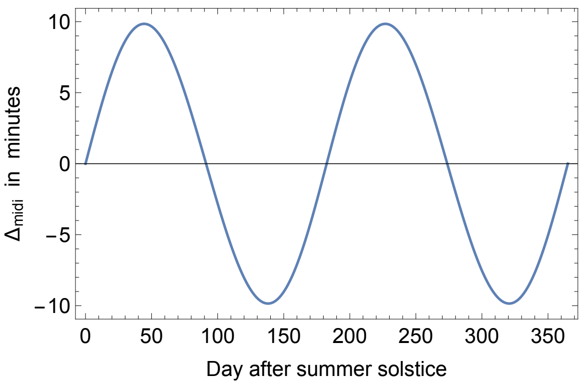


FIG. 4:

### 1.4. Trajectoire du soleil vue depuis le sol

Pour discuter la position du soleil au cours d'une journée, on va à partir de maintenant partir du midi solaire. C'est à dire que dans ce qui suit, midi (solaire) correspond en fait à midi plus $24 \times 60\Delta_{\rm midi}$ minutes. Il y aura juste besoin de reprendre en compte ce décalage du midi solaire pour les expressions donnant les lever et coucher du soleil. Les calculs de durée du jour et d'ensoleillement pour les panneaux solaires sont en revanche complètement indépendants de ce choix.

On définit deux angles pour repérer le soleil localement. Tout d'abord $\theta_{\mathrm{loc}}$ qui est l'angle entre le soleil et le zenith. Et puis $\varphi_{\mathrm{loc}}$ qui est l'angle de la projection du soleil sur l'horizon avec l'axe nord-sud. Ces angles $\theta_{\mathrm{loc}}, \varphi_{\mathrm{loc}}$ sont les angles en coordonnées sphériques associés naturellement à un observateur sur Terre qui utiliserait le zenith comme axe $z$ et le sud comme axe $x$ (voir Fig. 5). Dans ce système Cartésien local, la direction du soleil est

$$(\sin\theta_{\mathrm{loc}}\cos\varphi_{\mathrm{loc}}, \sin\theta_{\mathrm{loc}}\sin\varphi_{\mathrm{loc}}, \cos\theta_{\mathrm{loc}})\,. \quad (12)$$

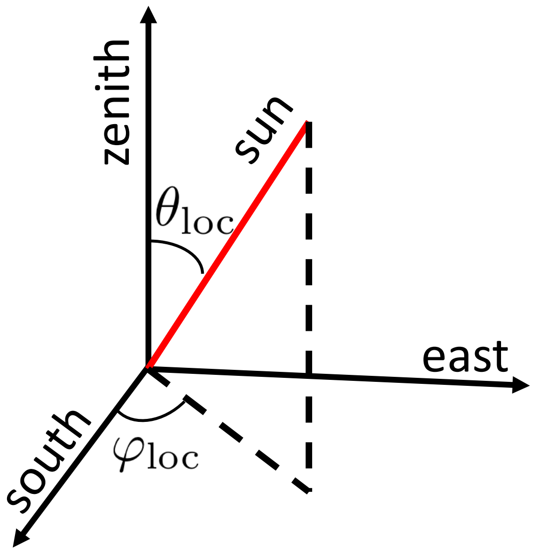


FIG. 5: Angles utilisés pour repérer le soleil en un point du globe.

Les directions du zenith et du sud au point du globe repéré par les angles de la figure 1 sont en coordonnées Cartesiennes respectivement

$$(\cos\lambda\cos\varphi_{\mathrm{T}}, \cos\lambda\sin\varphi_{\mathrm{T}}, \sin\lambda)\,, \quad (13)$$

$$(\sin\lambda\cos\varphi_{\mathrm{T}}, \sin\lambda\sin\varphi_{\mathrm{T}}, -\cos\lambda)\,. \quad (14)$$

Ainsi, le cosinus de l'angle entre le zenith et le soleil est donné par le produit scalaire de (13) et (5), et on obtient

$$\cos\theta_{\mathrm{loc}} = \cos\lambda\cos\delta\cos(\varphi_{\mathrm{T}} - \varphi_{\mathrm{S}}) + \sin\delta\sin\lambda \quad (15)$$

où

$$\omega = \varphi_{\mathrm{T}} - \varphi_{\mathrm{S}} \quad (16)$$

est la rotation de la Terre par rapport au midi solaire (mais par rapport à l'axe Terre-Soleil qui tourne doucement au cours de l'année, d'où la soustraction de $\varphi_{\mathrm{S}}$). La relation entre cet angle de rotation au cours de la journée et l'heure $h$ (en heures et avec le midi solaire à midi) est on ne peut plus simple :

$$\omega = \frac{h-12}{24} \times 2\pi\,. \quad (17)$$

Le cosinus entre la direction du soleil et la direction du sud permet également d'accéder à l'angle $\varphi_{\mathrm{loc}}$ donnant l'azimuth du soleil. Il s'agit de l'angle entre la projection du soleil sur l'horizon et la direction du sud. On obtient

$$\cos\varphi_{\mathrm{loc}} = \frac{\cos\delta\sin\lambda\cos\omega - \sin\delta\cos\lambda}{\sin\theta_{\mathrm{loc}}}\,. \quad (18)$$

Cette équation détermine en fait seulement $0 \leq |\varphi_{\mathrm{loc}}| \leq \pi$. Le signe de l'azimuth n'est pas déterminé par cette équation mais on peut par exemple choisir un azimuth négatif durant la matinée pour les directions vers l'est, et positif l'après-midi pour les directions vers l'ouest. Dans l'hémisphère nord au dessus du tropique, le soleil passe toujours par le sud au midi solaire. Inversement dans l'hémisphère sud au dessous du tropique, le soleil passe toujours au nord au midi solaire. En revanche entre les tropiques cela dépend du jour dans l'année.

Si on connait l'heure du jour, on connait l'angle de rotation $\omega$, et donc on détermine la position du soleil vu depuis la Terre grâce à $\theta_{\mathrm{loc}}, \varphi_{\mathrm{loc}}$. Des exemples de trajectoires du soleil sont disponible sur le billet [1].

En particulier, à midi ($\omega = 0$), le soleil passe au zénith si $\cos\theta_{\mathrm{loc}} = 1$ et donc si la condition $\lambda = \delta$ est satisfaite. La figure 3 peut donc être utilisée pour déterminer à quels jours de l'année c'est le cas dans la zone intertropicale (ailleurs cela n'arrive jamais). Il suffit de reporter en ordonnée la latitude et de lire en abscisse les deux jours de l'année où le soleil passe par le zénith à midi. Pour des points exactement sur les tropiques cela n'arrive qu'une fois par an, à un des deux solstices.

### 1.5. Lever et coucher du soleil

L'application la plus immédiate est la détermination de la durée entre le lever et le coucher du soleil, et connaissant l'heure du midi solaire, la détermination des lever et coucher du soleil. Ils sont simplement obtenus comme étant les moments où $\theta_{\text{loc}} = \pi/2$. On en déduit que la rotation de la Terre depuis le midi solaire jusqu'au coucher du soleil doit être de

$$\omega_{\text{horizon}} = \arccos(-\tan\lambda\tan\delta)\,. \qquad (19)$$

L'heure du coucher du soleil est (en heures)

$$H_{\text{coucher}} = 12 + 24\Delta_{\text{midi}} + \frac{24}{2\pi}\omega_{\text{horizon}}\,, \qquad (20)$$

où cette fois-ci on prend l'heure de l'horloge et donc on a pris en compte le décalage du midi solaire. L'heure du lever est le symétrique par rapport au midi solaire

$$H_{\text{coucher}} = 12 + 24\Delta_{\text{midi}} - \frac{24}{2\pi}\omega_{\text{horizon}}\,. \qquad (21)$$

Si on n'est pas sur le méridien de référence, alors il suffit de rajouter $F - \text{Longitude}/15$, où $F$ est le numéro du fuseau horaire (1 en heure d'hiver et 2 en heure d'été à Paris), et la longitude est exprimée en degrés. Enfin il faut savoir que les éphémérides prennent en général en compte le moment où le soleil a complètement disparu sous l'horizon, alors qu'ici $\omega_{\text{horizon}}$ a été considéré avec la condition que le centre du soleil est sur l'horizon. En principe il faut donc attendre que le centre du soleil soit un demi degré sous l'horizon pour définir les heures officielles de lever et de coucher.

La durée du jour, qui ne dépend pas du midi solaire ni de cette correction de longitude bien sûr, est donc (en heures)

$$T_{\text{jour}} = 2 \times \frac{24}{2\pi}\omega_{\text{horizon}} = 12 \times \frac{\omega_{\text{horizon}}}{(\pi/2)}\,. \qquad (22)$$

On retrouve qu'à l'équinoxe, la déclinaison étant nulle ($\delta = 0$), et donc $\omega_{\text{horizon}} = \pi/2$, si bien que le jour dure 12 heures, quelle que soit la latitude.

## 2. APPLICATION AUX PANNEAUX SOLAIRES

Le facteur d'efficacité géométrique d'un panneau solaire est donné par la projection de la direction du soleil avec la direction de la normale au plan du panneau solaire. De manière équivalente il s'agit de $\cos\iota$ où $\iota$ est l'angle d'incidence, défini comme l'angle entre la normale au panneau et la direction du soleil.

Si le soleil est bien en face du panneau l'efficacité géométrique est 1, et si la direction du soleil est tangentielle au panneau solaire, celui-ci n'est pas éclairé et son efficacité géométrique est nulle. Bien évidemment, il faut ensuite rajouter l'efficacité intrinsèque des panneaux solaires (autour de 15%) mais celle-ci ne dépend pas de l'orientation du soleil et on ne la prend jamais en compte ici.

Par ailleurs on néglige les effets de l'atmosphère, à la fois l'attenuation du flux solaire lorsque le soleil est très bas sur l'horizon (qui se manifeste par le rougeoiement du soleil au lever et coucher du soleil), ainsi que la baisse de luminosité due aux nuages. Il s'agit donc d'un exercice théorique assez éloigné de la réalité.

### 2.1. Panneaux solaires à plat

Pour des panneaux solaires disposés à plat sur le sol horizontal, le facteur d'efficacité géométrique est donné par la projection de la direction du soleil sur la direction du zenith, et donc par $\cos\theta_{\text{loc}}$. A part dans la zone intertropicale, le soleil ne passe jamais au zenith, si bien qu'il est clair que ce n'est pas la manière optimale de disposer les panneaux.

### 2.2. Inclinaison des panneaux solaires

#### *2.2.1. Inclinaison optimale*

On considère des panneaux solaires qui ne peuvent que s'incliner plus ou moins vers le sud ou le nord. Ils tournent autour d'un axe est-ouest. La direction normale aux panneaux est donc

$$(\sin\beta, 0, \cos\beta)\,, \tag{23}$$

où $\beta$ est l'inclinaison par rapport à la verticale (positive lorsque les panneaux sont tournés vers le sud et negative lorsqu'ils sont tournés vers le nord). Pour maximiser le flux solaire, il faut maximiser le produit scalaire de cette direction avec la direction du soleil. L'angle d'incidence $\iota$ est donné par

$$\begin{aligned} \cos\iota &= \sin\beta\sin\theta_{\rm loc}\cos\varphi_{\rm loc} + \cos\beta\cos\theta_{\rm loc} \qquad (24) \\ &= \cos\delta\cos\omega\cos(\lambda-\beta) + \sin\delta\sin(\lambda-\beta)\,. \end{aligned}$$

On obtient avec la première relation (en dérivant par rapport à $\beta$ pour la maximiser) que la direction qui assure un flux maximal est donnée par

$$\tan\beta = \tan\theta_{\rm loc}\cos\varphi_{\rm loc}\,. \tag{25}$$

On obtient également en maximisant la deuxième relation

$$\tan(\lambda-\beta) = \frac{\tan\delta}{\cos\omega}\,. \tag{26}$$

Ces deux relations sont équivalentes même si cela n'est pas évident en les regardant. La première est valable tout le temps lorsqu'on isole $\beta$ en inversant la tangente, et est donc plus intéressante en pratique.

On retrouve que lorsque le soleil est parfaitement au sud ($\varphi_{\rm loc} = 0$), il suffit de diriger la normale au panneau vers le soleil puisque $\beta = \theta_{\rm loc}$. Lorsque le soleil est à l'est (le matin en été) ou à l'ouest (le soir en été) exactement, on a $\cos\varphi_{\rm loc} = 0$ et donc $\beta = 0$. Il faut donc dans ces moments là mettre les panneaux à plat sur le sol, avec la normale dirigée vers le zenith. Comme on ne peut pas incliner les panneaux vers l'est ou l'ouest, le mieux à faire c'est effectivement de ne pas les incliner du tout ! Puis très tôt le matin ou tard le soir, lorsque le soleil est un peu vers le nord, il faut incliner les panneaux un peu vers le nord car $\beta < 0$ et cela permet de maintenir une production même lorsque le soleil est rasant sur l'horizon.

Avec la relation (26) on obtient clairement que lors des équinoxes ($\delta = 0$), l'angle d'inclinaison optimal est constant et donné par la latitude puisque la condition devient $\beta = \lambda$.

#### *2.2.2. Ombres et réduction d'efficacité*

Enfin lorsque les panneaux solaires sont assez proches les uns des autres, il peut y avoir une baisse de l'efficacité géométrique à cause des ombres qu'un panneau projette sur un autre panneau. On introduit le taux d'occupation du sol $\mathcal{C}$ qui est le rapport entre la surface d'un panneau et la surface au sol moyenne disponible par panneau. Si celui-ci est très petit, alors les panneaux sont très espacés les uns des autres et à part quand le soleil sera rasant au dessus de l'horizon, il n'y aura pas de problème avec les ombres. Typiquement dans les projets en plein désert où la place n'est pas un problème, ce taux est de $\mathcal{C} \simeq 0.2$, mais lorsque des panneaux sont déployés en concurrence avec d'autres usages, on tend à réduire le gâchis d'espace et avoir $\mathcal{C} \simeq 0.5$.

Pour des panneaux inclinés autour de l'axe est-ouest, ce qui compte est l'inclinaison du soleil dans le plan nord-sud, car c'est cette inclinaison qui détermine la taille des ombres. Cette inclinaison du soleil $\tilde\theta_{\rm loc}$ satisfait

$$\tan\tilde\theta_{\rm loc} = \tan\theta_{\rm loc}\cos\varphi_{\rm loc}\,. \tag{27}$$

Une fois cet angle déterminé, on peut déterminer la surface d'une ombre portée par un panneau de surface $S$ incliné d'un angle $\beta$

$$A = S\cos\beta + S\sin\beta\cos\tilde\theta_{\rm loc}\,. \tag{28}$$

Par conséquent les ombres commenceront à se porter sur les panneau de la rangée voisine si $S/A < \mathcal{C}$, soit la condition

$$\frac{\cos\tilde\theta_{\rm loc}}{\cos(\tilde\theta_{\rm loc}-\beta)} > \mathcal{C}\,. \tag{29}$$

#### *2.2.3. Angle d'inclinaison constant*

Si on ne peut modifier en temps réel l'inclinaison des panneaux solaires, on peut au moins choisir une inclinaison $\beta_{\rm cons}$ constante permettant de maximiser le flux solaire au cours de l'année. Puisque lors des équinoxes, l'angle d'inclinaison optimal est $\lambda$, on devine que cet angle optimal une fois moyenné sur tous les jours de l'année ne doit pas être très différent.

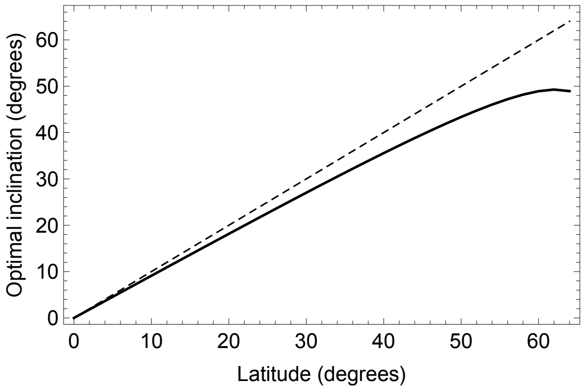


FIG. 6: La courbe continue est l'angle d'inclinaison $\beta$ constant optimal en fonction de la latitude. En pointillés la courbe $\beta = \lambda$ pour illustrer que l'angle optimal est à peu près égal à la latitude sauf aux grande latitudes où il tend à être légèrement inférieur.

Néanmoins il n'est pas possible de trouver une forme analytique simple. Pour trouver l'angle d'inclinaison optimal, on va donc moyenner (24) sur les heures de la journée (moyenne sur $\omega$) et sur les jours de l'année (moyenne sur $\alpha$). Puis on va déterminer numériquement l'angle qui maximise ce résultat. Le résultat obtenu est illustré sur la figure 6.

## Conclusion

Les efficacités géométriques dans les différentes configurations décrites précédemment, pour diverses latitudes, pour différents jours de l'année, sont illustrées dans le billet associé [1]. Cela permet alors de déterminer le rapport entre la production moyenne et la production de pic au midi du meilleur jour. C'est ce rapport qui détermine le surdimensionnement nécessaire du réseau électrique nécessaire pour faire fonctionner le système, en supposant par ailleurs que l'on ait les moyens de stocker toute cette énergie, ce qui est loin d'être facile...

[1] Le dernier carbone https://lederniercarbone.org/intermittence-panneaux-solaires